PART3 ベクトルのなす角

要点① ベクトルのなす角

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ より

$$\cos\theta=\underline{\qquad\quad}$$

である。

また，2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について

$|\vec{a}|=\qquad\qquad$，$|\vec{b}|=\qquad\qquad$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=$

であるから

$$\cos\theta=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

である。

ベクトルのなす角

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}}$$

例 2つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 4)$，$\vec{b}=(-1,\ 3)$ のなす角 θ を求める。

$|\vec{a}|=\qquad\qquad=2\sqrt{5}$，$|\vec{b}|=\qquad\qquad=\sqrt{10}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\qquad\qquad\qquad=10$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\qquad}{\quad\times\quad}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

であるから　$\theta=$

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について

$\vec{a}\quad\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=\qquad\iff a_1b_1+a_2b_2=$

が成り立つ。

[MEMO]

3 (1) 2つのベクトル $\vec{a}=(2,\ -\sqrt{3})$，$\vec{b}=(1,\ 3\sqrt{3})$ のなす角 θ を求めよ。

(2) 2つのベクトル $\vec{a}=(3,\ 6)$，$\vec{b}=(x,\ 5)$ が垂直になるような x の値を求めよ。

Point Pickup

ベクトルのなす角

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}}$$

特に　$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff a_1b_1+a_2b_2=0$

第3講 PART3 確認問題

1 2つのベクトル $\vec{a}=(4,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ 5)$ のなす角 θ を求めよ。

$\theta=$ アイ °

2 2つのベクトル $\vec{a}=(3,\ -4)$，$\vec{b}=(x,\ 9)$ が垂直になるような x の値を求めよ。

$x=$ ウエ

PART3 ベクトルのなす角

3 (1) 2つのベクトル $\vec{a}=(2,\ -\sqrt{3})$, $\vec{b}=(1,\ 3\sqrt{3})$ のなす角 θ を求めよ。

(2) 2つのベクトル $\vec{a}=(3,\ 6)$, $\vec{b}=(x,\ 5)$ が垂直になるような x の値を求めよ。

[解答]

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$, $|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(3\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times1+(-\sqrt{3})\times3\sqrt{3}=2-9=-7$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-7}{\sqrt{7}\times2\sqrt{7}}=-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　　$\theta=120^\circ$

(2) 2つのベクトル $\vec{a}=(3,\ 6)$, $\vec{b}=(x,\ 5)$ が垂直となるのは $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ のとき

よって　$3\times x+6\times5=0$　より　$x=-10$

第 3 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] アイ：45

[解説]

$\vec{a}=(4,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ 5)$ より

$$|\vec{a}|=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$$

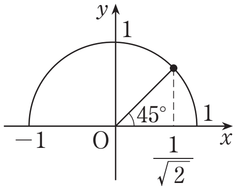
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times3+1\times5=12+5=17$$

よって

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$ [A]

$$=\frac{17}{\sqrt{17}\times\sqrt{34}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}$$



$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より

$$\boldsymbol{\theta=45^\circ}$$

[A]　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}}$$

2

[正解] ウエ：12

[解説]

2 つのベクトル $\vec{a}=(3,\ -4)$，$\vec{b}=(x,\ 9)$ が垂直となるのは $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ のときである。 [B]

よって

$$3\times x+(-4)\times9=0$$

より

$$\boldsymbol{x=12}$$

[B]　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について

$$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$
$$\iff a_1b_1+a_2b_2=0$$